Gymnase
Auguste Piccard

TRAVAIL DE MATURITE

Les Fractions Continuées
Suite de Fibonacci

Romain Gilliéron 3MS3

Travail supervisé par
Bernard Verrey

12 novembre 2007

Résumé

Ce travail présente quelques possibilités d'utilisation des fractions continuées.

La première partie introduit les notions de base, mêlant appellations, notations et histoire. Il y est présenté un exemple d'utilisation concrète de ces fractions : l'horlogerie, et en particulier l'horloge astronomique de Strasbourg, dont le créateur avait utilisé les fractions continuées pour trouver la meilleure approximation des rapports de temps de révolution entre les planètes, afin d'obtenir des fractions raisonnables pour la fabrication des engrenages. Dans ce travail est détaillé le rapport entre Jupiter et la Terre.

La deuxième partie présente la suite de Fibonacci et la démonstration d'une de ses propriétés, soit que la division d'un terme de la suite par son précédent tend vers le nombre d'or lorsque les termes croissent. Il y est démontré au passage quelques théorèmes utiles sur le sujet. Cette partie présente donc l'une des applications de ces fractions sur un plan purement théorique.

A l'image des mathématiciens du XVI^{e} siècle Bombelli et Cataldi, la troisième partie présente deux méthodes d'extraction de racines carrées par les fractions continuées.

Table des matières

1 Introduction **2**
1.1 Présentation du travail 2

2 Les fractions continuées **3**
2.1 Présentation 3
2.2 Horloges astronomiques 5

3 La suite de Fibonacci **7**
3.1 Biographie de Fibonacci 7
3.2 Fractions continuées et Fibonacci 7
3.2.1 Présentation de la suite 7
3.2.2 Fraction d'or 8
3.3 Convergence vers le nombre d'or 10

4 Extraction de racines carrées (par les fractions continuées) **15**
4.1 Méthode 1 15
4.2 Méthode 2 17
4.3 Calcul de fractions correspondantes 18

5 Conclusion **21**

Bibliographie **23**

A Annexe : Développement de la $\sqrt{13}$ par la méthode 2 **24**

Chapitre 1

Introduction

1.1 Présentation du travail

J'ai toujours été attiré par les mathématiques. Démontrer des théorèmes, pouvoir être sûr à 100% de mes réponses... il n'y avait aucun autre domaine étudié en cours dans lequel je puisse avoir dès le début des certitudes, non pas parce que je les avais apprises, mais parce que je les avais vérifiées ou trouvées par moi-même. C'est pourquoi je n'ai pas hésité à prendre l'option math-physique au début du gymnase et maintenant à prendre un travail de maturité sur les mathématiques.
Au début de ce travail, j'avais l'intention d'écrire un texte regroupant plusieurs théorèmes démontrés sur le sujet de Fibonacci et de sa célèbre suite de nombres. J'avais entendu parler de cette suite et je désirais découvrir comment celle-ci pouvait apparaître dans tant de domaines différents, trouver une utilisation dans des domaines qui a priori n'avaient aucun point commun.

Pendant que j'étudiais la première démonstration, j'ai découvert que l'on utilisait des fractions continuées pour la démontrer. Je n'avais encore jamais entendu parler de telles fractions, et j'ai eu envie de me pencher sur ces fractions particulières, pour en découvrir certaines propriétés et comprendre leur utilité sur un plan pratique. J'ai vite remarqué que ces fractions pouvaient être utiles dans bon nombre de domaines, et ai été surpris par la quantité de théorèmes que l'on pouvait trouver contenant ces fractions, et le nombre de matières tournant autour d'elles.
Dans ce travail, je vais expliquer ce que sont ces fractions continuées, présenter quelques théorèmes en rapport avec la suite de Fibonacci ainsi que sur ces fractions, et présenter l'un des domaines pratiques dans lequel elles peuvent être utilisées, les horloges astronomiques. Je conclurai avec un "bilan" de l'expérience qu'a été ce travail et de ce qu'elle m'a apporté.

Chapitre 2

Les fractions continuées

2.1 Présentation

Une fraction continuée est une fraction du type

$$\omega = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\dots}}}}$$

On remarque que cette fraction consiste en plusieurs étages de fractions, c'est pourquoi on les appelles parfois "fractions à étages". Dans mon travail, j'ai choisi d'utiliser le terme de fractions continuées, traduction du terme Anglais "continued fractions", inventé au XVII^{e} siècle par John Wallis. Il existe encore un troisième terme pour désigner les mêmes fractions, qui est "fraction continue". Ce dernier est le plus utilisé dans la langue française. Bien que la différence entre les termes "continuée" et "continue" ne soit pas grande, ce dernier peut porter à confusion, car le mot "continu" peut en maths désigner quelque-chose qui s'étend à l'infini, et il faut savoir que les fractions continuées peuvent être infinies, mais aussi finies, et ne comporter que peu d'étages de fractions. L'anglais évite cette confusion en utilisant "continued" et non "continuous". Il en résulte que les deux appellations désignent la même chose et sont toutes deux tolérées.

Revenons sur certains termes bons à savoir lorsque l'on parle de fractions continuées. Tout d'abord, les grandeurs $\{a_0; a_1; a_2; a_3; \dots\}$ sont appelés "quotients partiels". Il faut préciser que les quotients partiels sont des entiers positifs (excepté pour a_0 qui peut être négatif). Lorsqu'on parle de fraction continuée, les numérateurs sont égaux à 1. Si ce n'est pas le cas, cette fraction est appelée "fraction continuée généralisée", auquel cas tout numérateur est autorisé. Exemple de fraction continuée généralisée [réf. (7)] :

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \dots}}}}$$

Cette fraction est l'une des premières fractions continuées trouvées dans l'histoire. Elle a été découverte au XVII^{e} siècle par le mathématicien irlandais William Brouncker, qui est l'un des nombreux mathématiciens à avoir travaillé sur les fractions continuées.
Mais revenons à cette fraction. Il faut savoir que les fractions continuées généralisées étaient en réalité les premières fractions continuées découvertes. C'est uniquement par la suite que ces fractions ont été classées comme généralisées avec l'approfondissement des études sur le sujet.
Bien que certains historiens affirment que les fractions continuées aient existé dès le début des mathématiques, et il existe la preuve que certains mathématiciens les aient déjà utilisées avant 1500 (par exemple le célèbre Fibonacci), on associe souvent le début de celles-ci avec deux mathématiciens italiens du XVI^{e} siècle, Rafael Bombelli, celui-là même qui inventa les nombres complexes, et Pietro Antonio Cataldi, qui vécut jusqu'au début du XVII^{e}.
Ces deux mathématiciens ont travaillé sur une nouvelle méthode d'extraction des racines carrées à l'aide des fractions continuées. Par exemple, Bombelli trouva un algorithme pour extraire la $\sqrt{13}$ et découvrit la fraction exacte suivante

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6+\ldots}}$$

Par la suite, Cataldi utilisa une méthode similaire pour approcher la valeur de $\sqrt{18}$ et trouva les 15 premiers convergents de cette racine, notant que chaque résultat était alternativement plus grand ou plus petit que la valeur réelle (voir chapitre 4 pour les méthodes d'extraction de racines carrées par les fractions continuées). C'est aussi lui qui donna naissance à la notation actuelle des fractions continuées.
En parlant de notations, il en existe plusieurs pour désigner des fractions continuées.

La première notation consiste en l'écriture des quotients partiels uniquement. C'est la notation la plus utilisée.

$$\omega = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$$

Contrairement à la première notation, la seconde contient les quotients partiels mais aussi les numérateurs des fractions. Dans le cas de fractions continuées "de base", elle n'est pas utile puisque le numérateur est toujours unitaire. Mais dans le cas de fractions continuées généralisées, il est plus aisé de travailler avec cette deuxième notation.

$$\omega = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3} + \ldots$$

Quant à la troisième notation, elle est approximativement la même que la deuxième, et est également utilisée pour les fractions généralisées.

$$\omega = a_0 + \frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\ldots$$

Il est finalement possible, pour les fractions continuées infinies, de les écrire sous forme de limites.

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] = \lim_{n\to\infty} [a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$$

Les fractions continuées contiennent plusieurs propriétés très intéressantes. Je vais tout d'abord présenter la propriété la plus utilisée. Il s'agit d'approximations. En général, lorsque l'on veut trouver l'approximation d'une fraction, on arrondit son numérateur et dénominateur (dans le même sens pour être le mieux arrondi). Si maintenant on s'intéresse à la même fraction, écrite cette fois sous forme de fraction continuée, et que l'on arrondit cette fraction, l'approximation sera bien plus précise. Je vais éclaircir cette propriété à l'aide d'un exemple.

$$\omega = \frac{2183}{792} = 2,756313131\ldots$$

Voici les premiers termes de celle-ci en fraction continuée :

$$[2, 1, 3, 9, 1, 1, 1, 6, \ldots]$$

en arrondissant la première fraction pour obtenir des dizaines, on obtient :

$$\frac{2180}{790} = \frac{218}{79} = \mathbf{2,75}9493671$$

On remarque que l'approximation trouvée est bonne jusqu'au 2e chiffre après la virgule. Donnons maintenant l'approximation de la fraction continuée :

$$[2, 1, 3, 9] = \frac{102}{37} = \mathbf{2.756}7567\ldots$$

On remarque qu'avec uniquement les 4 premiers quotients partiels de la fraction continuée, la fraction est plus précise que la fraction arrondie plus haut ! Cette propriété a été grandement utilisée par les mathématiciens afin d'arriver à d'excellentes approximations à l'aide d'une méthode très simple. Ils ont également remarqué que ces approximations sont systématiquement plus grandes puis plus petites que la valeur réelle.

2.2 Horloges astronomiques

La méthode pour obtenir des arrondis par les fractions continuées a été très utilisée par le passé. Pour prendre un exemple pratique, Christian Huygens, mathématicien, astronome et physicien du XVII^{e}, fut le premier à utiliser les fractions continuées pour obtenir le nombre de dents d'un rouage afin d'approcher au mieux le rapport de vitesse des planètes dans la construction des horloges astronomiques.

Le cas suivant est tiré d'un texte sur l'horloge astronomique de Strasbourg [réf. (3)]. Le réalisateur de cette horloge n'est pas Huygens, mais Jean-Baptiste Schwilgué (fin XVII^{e}, début XVIII^{e}). Je ne prendrai pas pour exemple une horloge d'Huygens, car ce dernier est plus connu pour avoir découvert le balancier à l'arrière des pendules, qui donne une meilleure régularité à l'horloge, que pour ses calculs de fractions continuées. De plus, mes recherches infructueuses semblent montrer qu'il n'existe plus d'horloge créée de sa main.
A l'époque de la construction de l'horloge de Strasbourg, une roue dentée ne pouvait pas contenir plus de 500 ou moins de 20 dents, pour une raison de grosseur de roues et de technique de fabrication.
Cette horloge astronomique, qui existe encore aujourd'hui, représente l'heure, mais indique également le mouvement du soleil, de la lune et des planètes.
Pour comprendre l'utilisation de ces fractions par Schwilgué, je vais prendre comme exemple l'un des rapports que contient cette horloge, celui de Jupiter en rapport à la Terre.
La période de révolution de Jupiter est de 4330 jours, 14 heures, 14 minutes et 10 secondes, ou 374 163 250 secondes, et celle de la terre de 365 jours, 5 heures, 48 minutes et 48 secondes, ou 31 556 928 secondes. On sait que "par un engrenage constitué de deux roues dentées, on peut relier deux axes parallèles de manière que les vitesses de rotation de ces deux axes soient dans un rapport donné, rapport représenté par une fraction dont les termes sont les nombres de dents des deux roues" [réf. (3)]. Il fallait donc que Schwilgué réalise le rapport $\frac{31556928}{374163250}$.
Comme je l'ai dit plus haut, il ne pouvait produire des roues avec plus de 500 dents. Il développa donc sa fraction sous forme de fraction continuée et il obtint $[0; 11, 1, 5, 1, 53, 1, 15, 26, 2, 1]$. Il décida de simplifier cette fraction de la manière suivante $[0; 11, 1, 5, 1, 53, 1] = \frac{384}{4553}$ et il réalisa ce rapport à l'aide de deux engrenages, $\frac{96}{157}\text{et}\frac{32}{232}$. Ainsi, il entrait dans des proportions réalisables.
Calculons maintenant l'erreur que provoque cet arrondi sur la précision de l'horloge sur une année.

$$\frac{384}{4553} \cdot 374163250 \simeq 31556927$$

Il y a donc environ une seconde en moins par année, et seulement 1 minute et 54 secondes de décalage par siècle ! On remarque donc à quel point l'approximation est précise.
Schwilgué a reproduit ces calculs pour tous les autres rapports de temps de révolution des planètes. Cet exemple est un cas concret de l'utilité des fractions continuées.

Je vais dans le chapitre qui suit présenter un cas abstrait dans lequel les fractions continuées peuvent également être utiles, il s'agit de la démonstration d'un théorème sur la suite de Fibonacci.

Chapitre 3

La suite de Fibonacci

3.1 Biographie de Fibonacci

Le mathématicien Leonardo de Pisa est né à Pise vers 1175 après J.C. Cet Italien est plus connu sous le nom de Fibonacci, qui est un diminutif de Filius Bonaccio (fils de Bonaccio). Son Père, Bonaccio, travaillait à la colonie de Bujania en Algérie, où il était responsable du bureau des douanes. Fibonacci le rejoignit très jeune, et selon la volonté de son père, qui espérait faire de lui un marchand, fut initié aux calculs indo-arabes et apprit lors de ses voyages les savoirs et algorithmes orientaux.
Dans les environs de 1200, il retourna en Italie, où il travailla pendant 25 ans à rassembler, mettre à jour et développer toutes les connaissances qu'il avait acquises. En 1202, il publia son premier livre, le Liber Abaci. Ce livre est connu pour avoir introduit la numération arabe en Europe et est l'une des oeuvres qui donnèrent à Fibonacci la réputation d'être le plus accompli des mathématiciens du Moyen-Age.

3.2 Fractions continuées et Fibonacci

3.2.1 Présentation de la suite

La suite de Fibonacci est introduite pour la première fois dans le Liber Abaci. Plusieurs problèmes sont exposés dans ce livre, dont un problème sur le développement d'une famille de lapins. En voici l'énoncé :
« Une paire de lapins adultes donne naissance à une paire de bébés lapins chaque mois. Chaque paire de bébés lapins met un mois pour devenir adulte, puis donne naissance, chaque mois, à une paire de bébés lapins. Déterminer le nombre de paires de lapins après un certain nombre de mois. Il est aussi signalé que les lapins restent en vie indéfiniment.» [réf. (4)]
Voici les résultats de ce problème pour les 16 premiers mois :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

Cette suite de nombres est la célèbre suite de Fibonacci. Chaque terme est formé de la somme des deux termes précédents. En réalité, il existe une quantité de "suites de Fibonacci", étant donné qu'on appelle par ce nom toute suite du type $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, quels que soient les deux premiers termes. Exemple :

$$3, 1, 4, 5, 9, 14, 23, \ldots \quad \text{ou} \quad -22, 10, -12, -2, -14, -16, \ldots$$

Néanmoins, la suite la plus célèbre reste celle dont les deux premiers termes sont égaux à 1.

3.2.2 Fraction d'or

De nombreux mathématiciens se sont intéressés à cette suite, et y ont trouvé plusieurs propriétés. L'une de ces propriétés est que la division d'un terme par son précédent tend vers le célèbre nombre d'or ($\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618$). Plus les termes choisis sont grands, plus le résultat sera proche du nombre d'or.
Exemples :

$$\frac{1}{1} = 1, \qquad \frac{2}{1} = 2, \quad \ldots \quad \frac{5}{3} \simeq 1.666, \quad \ldots \quad \frac{987}{610} \simeq 1.6180327, \quad \ldots$$

Ces fractions, comme toute autre fraction, je l'ai expliqué plus haut, peuvent être écrites sous formes de fractions continuées. En voici la forme et la fraction continuée :

$$[0;1] \qquad 0 + \frac{1}{1}$$

$$[1;1] \qquad 1 + \frac{1}{1}$$

$$[1;1,1,1] \qquad 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$$

$$[1;1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1] \qquad 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}}}}}}}}}$$

On remarque que cette forme est très particulière. Voici un théorème intéressant sur le sujet :

Si une fraction continuée possède n quotients incomplets dont chacun est égal à 1, cette fraction est égale à $\frac{u_n+1}{u_n}$ [réf. (1)].

Comme vous pouvez le remarquer, ce théorème utilise la fraction continuée pour obtenir la fraction de base, tandis que notre approche est inverse.

Pour démontrer ce théorème, j'ai besoin d'un Lemme, que j'admettrai sans démonstration (cf. Vorobiev pages 160-162 pour la démonstration) :
Soit une fraction continuée $\omega_k = \frac{P_k}{Q_k}$, où P_k et Q_k sont les numérateur et dénominateur de la fraction irréductible d'ω_k et a_k les quotients partiels de la fraction continuée, les relations suivantes sont toujours vérifiées [réf. (1)]

$$P_{k+1} = P_k a_{k+1} + P_{k-1} \tag{3.1}$$

$$Q_{k+1} = Q_k a_{k+1} + Q_{k-1} \tag{3.2}$$

$$P_{k+1}Q_k - P_k Q_{k+1} = (-1)^k \tag{3.3}$$

Etudions maintenant la fraction continuée suivante, dont les quotients incomplets sont égaux à 1 :

$$\omega_k = \frac{P_k}{Q_k}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$\omega_2 = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$$

On remarque que $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $Q_1 = 1$ et que $Q_2 = 1$. Maintenant, calculons ω_{n+1} en utilisant le lemme présenté ci-dessus.

$$\omega_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n a_{n+1} + Q_{n-1}}$$

Etant donné que tous les quotients partiels sont égaux à 1, on peut en déduire les relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} P_n a_{n+1} + P_{n-1} = P_n + P_{n-1} \\ Q_n a_{n+1} + Q_{n-1} = Q_n + Q_{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \omega_{n+1} = \frac{P_n + P_{n-1}}{Q_n + Q_{n-1}}$$

Dans la suite qui nous intéresse, on a

$$u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5 \ldots$$

Donc $P_1 = u_2$, $P_2 = u_3$, $Q_1 = u_1$ et $Q_2 = u_2$. On obtient ainsi les relations suivantes $P_n = u_{n+1}$ et $Q_n = u_n$. Et pour finir,

$$\omega_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Notre fraction $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est donc la fraction continuée dont tous les numérateurs et quotients incomplets sont égaux à 1.

3.3 Convergence vers le nombre d'or

Je vais maintenant m'intéresser à la propriété citée en (3.2), soit que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi$$

Je vais démontrer cette propriété dans les lignes qui suivent.
Soit

$$\omega_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2+\ldots+\frac{1}{a_n+\ldots}}}$$

une fraction continuée infinie et

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}, \ldots$$

une suite de fractions correspondantes. La limite de cette suite, si elle existe, est égale à la valeur de la fraction continuée infinie. Tout d'abord, démontrons que cette suite a une limite.
Etudions les deux suites suivantes :

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}, \ldots \tag{3.4}$$

et

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots, \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \ldots \tag{3.5}$$

La relation suivante découle directement de l'équation (3.3)

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k+1}} \tag{3.6}$$

et selon les équations (3.1) et (3.2)

$$P_0 < P_1 < P_2 < \ldots,$$

$$Q_0 < Q_1 < Q_2 < \ldots \tag{3.7}$$

Utilisons-les tout d'abord pour la première suite.

$$\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} - \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} + \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{-1}{Q_{2n+2}Q_{2n+1}} + \frac{1}{Q_{2n+1}Q_{2n}}$$

Etant donné que $Q_{2n+2} > Q_{2n+1} > Q_{2n}$, le 1^{er} terme de cette somme est plus petit que le 2e. Il en découle que cette somme est toujours positive. Vu qu'un terme moins son précédent est positif, la suite (3.4) est croissante.
Passons à la deuxième suite. Selon le même procédé, on obtient

$$\frac{P_{2n+3}}{Q_{2n+3}} - \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = \frac{1}{Q_{2n+3}Q_{2n+2}} + \frac{-1}{Q_{2n+2}Q_{2n+1}} < 0.$$

Cela implique que la suite (3.5) est décroissante.
Utilisons pour la prochaine étape un terme de chaque suite :

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \quad \text{et} \quad \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$$

et soit k un nombre impair supérieur à $2n$ et à $2m+1$. Prenons la relation (3.6). Si k est impair, $(-1)^k$ est négatif et $\frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k+1}} < 0$. Donc, $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} < 0$ et finalement, $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ doit être inférieur à $\frac{P_k}{Q_k}$. On obtient la relation suivante :

$$\frac{P_k}{Q_k} > \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \tag{3.8}$$

Etant donné que $k > 2n$ (et donc que $k+1 > 2n$), que la suite (3.4) est croissante et que la fraction $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ se trouve après la $\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$, nous obtenons la relation suivante :

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} > \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \tag{3.9}$$

et puisque la suite (3.5) est décroissante, que $k > 2m+1$ et donc que la fraction $\frac{P_k}{Q_k}$ se trouve après la fraction $\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$ dans la suite, cela nous amène à

$$\frac{P_k}{Q_k} < \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} \tag{3.10}$$

En rassemblant ces trois inéquations on obtient

$$\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} > \frac{P_k}{Q_k} > \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} > \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} > \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \tag{3.11}$$

Ce résultat nous prouve que tout terme impair de la suite est supérieur à tout terme pair. On pourrait le figurer comme si tous les termes de rang pair se trouvaient en dessous d'une droite, qui serait notre limite, et que tous les nombres de rang impair seraient en dessus. Mais rien ne nous prouve encore que cette suite tend vers cette limite. Voici donc la démonstration de la convergence : En reprennant (3.6), on peut écrire

$$\left| \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \frac{1}{Q_{n+1} Q_n}.$$

Vu que tout Q_n est un nombre entier, et que chaque $Q_{n+1} > Q_n$ (cf.(3.7)), Q_n est forcément plus grand ou égal à n. Il est donc évident que $Q_{n+1}Q_n \geq (n+1)n$ et donc que $Q_{n+1}Q_n > n^2$. On obtient donc

$$\frac{1}{Q_{n+1} Q_n} < \frac{1}{n^2}$$

Pour $n \to \infty$, la différence de la $(n+1)^e$ et de la n^e fraction tend en valeur absolue vers zéro. Ce qui veut dire que la suite tend, lorsque $n \to \infty$, vers une limite encore inconnue. Cette limite est la valeur de la fraction continuée infinie.
Jusqu'ici, nous avons travaillé sur une fraction continuée générale. Maintenant, nous allons travailler sur la fraction qui nous intéresse, c'est-à-dire

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\ldots}} \tag{3.12}$$

Cherchons maintenant la valeur de cette fraction, c'est-à-dire la $\lim_{n\to\infty} \omega_n$, où $\omega_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Calculons cette limite.
Pour cela j'ai besoin de la formule de Binet, que j'admettrai sans démonstration. La voici.

$$u_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}} \tag{3.13}$$

Par la suite, j'utiliserai α et β pour simplifier les équations. Les voici :

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Et voici un théorème utile.
Théorème : *Le terme u_n de la suite de Fibonacci est l'entier le plus proche du nombre $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$, c'est-à-dire du n^e terme a_n de la progression géométrique dont le premier terme est $\frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ et la raison est égale à α.* [réf. (1)]

Petit rappel : Une suite géométrique est une suite du type $a_n = a_{n-1} \cdot r$, r étant un nombre donné, appelé la raison. Dans notre cas, la raison est α.

Pour démontrer ce théorème, il faut prouver que $u_n - a_n$ est toujours inférieur à $\frac{1}{2}$ en valeur absolue, car si cette différence était plus grande, un autre entier serait plus proche. En remplaçant u_n par la formule de Binet et a_n par son équivalent dans le théorème, on obtient

$$|u_n - a_n| = \left|\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{\alpha^n - \alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right| = \frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}}$$

$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618\ldots$. Sa valeur absolue est donc plus petite que 1, et $|\beta^n|$ est lui aussi plus petit que 1, quel que soit n. $\sqrt{5} > 2$, donc, $\frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$.
Le théorème est démontré.
Nous avons maintenant u_n le nombre entier le plus proche de $\frac{\alpha^n}{\sqrt{2}}$. Donc,

$$u_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \theta_n$$

et $|\theta|$ est inférieure à $\frac{1}{2}$ pour tout n.
Reprenons le résultat obtenu en fin de chapitre (3.2).

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

En remplaçant par u_n, trouvé plus haut,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} + \theta_{n+1}}{\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \theta_n}$$

et en transformant un peu... les $\sqrt{5}$ se simplifient.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha^{n+1}+\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}{\frac{\alpha^n+\theta_n\sqrt{5}}{\sqrt{5}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1} + \theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n + \theta_n\sqrt{5}}$$

Puis,

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1} + \theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n(1 + \frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n} + \frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n}}{1 + \frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n}}$$

Et $\frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n}$ étant égal à α, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha + \frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n}}{1 + \frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha + \frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n})}$$

Maintenant, $\theta_{n+1}\sqrt{5}$ est inférieur à 2 en valeur absolue, et α^n croît indéfiniment lorsque $n \to \infty$ puisqu'$\alpha > 1$. Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n} = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n} = 0$$

on a donc

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha + 0}{1 + 0} = \alpha$$

et par définition

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

La convergence vers φ est démontrée.

Il existe une méthode plus élégante pour calculer la valeur de la fraction continuée infinie donnée en (3.12), qui n'utilise ni la formule de Binet, ni le passage à la limite.
Je trouvais néanmoins intéressant de donner tout d'abord la méthode n'utilisant que les nombres de la suite de Fibonacci, sans utiliser les fractions continuées, avant de donner celle-ci. On peut ainsi mesurer l'utilité de ces fractions dans certaines démonstrations, en comparaison à d'autres méthodes plus complexes ! La voici :
Prenons

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\ldots}} = 1 + \frac{1}{x}$$

x est également une fraction continuée

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

En multipliant par x, on obtient

$$x^2 - x - 1 = 0$$

et avec le discriminant

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Puisque la valeur de la fraction ne peut pas être négative, on prend la racine positive, soit

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Chapitre 4

Extraction de racines carrées (par les fractions continuées)

Je vais dans cette partie m'intéresser à des méthodes d'extraction de racines carrées à l'aide de fractions continuées.
Dans la partie d'introduction du chapitre "fractions continuées", j'ai parlé de deux mathématiciens, Bombelli et Cataldi, qui avaient utilisé des méthodes pour extraire des racines carrées par les fractions continuées. A l'époque de ces deux mathématiciens, ces méthodes d'extraction étaient "rapides" et plutôt efficaces. On pouvait en effet trouver les valeurs exactes des racines carrées (sous forme de fractions continuées infinies), puis en les transformant en écriture décimale, les réduites convergeaient assez rapidement vers la valeur exacte.
Il est présenté dans ce chapitre deux méthodes d'extraction, illustrées par deux exemples concrets. On y détermine la valeur exacte de la racine carrée sous forme de fraction continuée infinie ; dans le premier cas, la méthode aboutit à une fraction continuée généralisée, tandis que dans le deuxième, plus compliqué, on obtient une fraction continuée "de base", c'est-à-dire dont tous les numérateurs sont égaux à 1.

4.1 Méthode 1

Voici le raisonnement pour la première méthode, que je présente à l'aide d'un exemple, celui de Bombelli, qui avait calculé la $\sqrt{13}$.
Prenons comme point de départ l'équation $x^2 = 13$

$$x^2 - 13 = 0$$

On remplace par le plus grand carré inférieur à 13 et par le reste

$$x^2 - 9 - 4 = 0$$

puis on additionne le reste

$$x^2 - 9 = 4$$

on factorise à l'aide des produits remarquables

$$(x+3)(x-3) = 4$$

on divise par la parenthèse contenant le nombre positif

$$x - 3 = \frac{4}{x+3}$$

et finalement on obtient

$$x = 3 + \frac{4}{x+3} \qquad \text{ou} \qquad x = 3 + \frac{4}{3+x}$$

Pour terminer, on remplace chaque x par la valeur obtenue, à l'inverse du chapitre 3, et l'on obtient une fraction continuée infinie

$$\Rightarrow \qquad x = 3 + \frac{4}{3 + \left(3 + \frac{4}{3+\ldots}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6+\ldots}}}$$

On peut remarquer que cette fraction est une fraction continuée généralisée. Lagrange a prouvé en 1770 que "si le nombre considéré est un irrationnel quadratique, c'est-à-dire solution d'une équation du deuxième degré à coefficients entiers, alors son développement en fraction continuée est périodique."[réf. (3)] On peut faire le lien entre ce théorème et le chapitre 3, dont la solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ était $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$, et que celle-ci pouvait être écrite sous forme de fraction continuée infinie, qui était périodique ! Toutes les équations pour calculer les racines carrées de nombres entiers par ces méthodes remplissent les conditions du théorème, et leurs développements en fractions continuées sont donc périodiques.
Pour prendre maintenant l'exemple de Cataldi : $\sqrt{18}$, on obtient à l'aide de la même méthode le résultat suivant :

$$x^2 - 18 = 0$$
$$\ldots$$
$$(x+4)(x-4) = 2$$
$$\ldots$$
$$x = 4 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8+\ldots}}$$

C'est évidemment encore une fraction continuée généralisée et infinie ! On peut relever la ressemblance entre les deux fractions, et terminer par la forme générale suivante :

$$x = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \dots}}}$$

4.2 Méthode 2

Passons maintenant à la deuxième méthode, plus compliquée mais non-moins intéressante. Elle consiste à chercher étage par étage, et à l'aide de changement d'inconnues, l'approximation la meilleure et, en se référant au théorème de Lagrange présenté quelques lignes précédemment, trouver la périodicité de la fraction.
Pour la présenter, je vais utiliser un exemple qui n'est ni trop court ni trop long, afin que la méthode soit bien comprise. Je vais donc calculer la $\sqrt{18}$. On part de la même étape que précédemment, c'est-à-dire

$$x^2 - 18 = 0 \tag{4.1}$$

On définit $f_1(x) = x^2 - 18$. On entoure la solution de l'équation par les deux entiers les plus proches, ce qui nous donne les meilleures bornes inférieures et supérieures entières

$$f_1(4) < 0 \quad , \quad f_1(5) > 0$$

puis on transforme avec la borne inférieure au 0 de la manière suivante :

$$x = 4 + \frac{1}{a}$$

On peut le faire, car s'il est le nombre entier le plus proche du zéro, alors en ajoutant un terme inférieur à 1, on peut obtenir précisément le 0. C'est ce que l'on fait en ajoutant une fraction $\frac{1}{a}$. On remplace dans l'équation (4.1) ce résultat pour x, et on obtient

$$2a^2 - 8a - 1 = 0 \tag{4.2}$$

De ce point, on recommence le même schéma, avec une nouvelle inconnue à déterminer

$$f_2(4) < 0 \quad , \quad f_2(5) > 0$$

$$a = 4 + \frac{1}{b}$$

on remplace dans l'équation précédente, c'est-à-dire la (4.2)

$$b^2 - 8b - 2 = 0 \tag{4.3}$$

$$f_3(8) < 0 \quad , \quad f_3(9) > 0$$

$$b = 8 + \frac{1}{c}$$

$$2c^2 - 8c - 1 = 0 \tag{4.4}$$

On remarque que cette équation du 2e degré, excepté l'inconnue, est la même que l'équation (4.2). Son résultat sera donc le même, et en continuant, on reformera une boucle. La périodicité de cette fraction est donc démontrée :

$$x = 4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{8 + \dots}}}}$$

$$x = [4; \overline{4, 8}]$$

Pour le développement de la $\sqrt{13}$ par cette méthode, assez longue, voir les pages annexes.
Ce raisonnement est très utile pour quiconque travaille avec les fractions continuées basiques, mais d'après les raisons que l'on a de calculer une racine, la première méthode est plus rapide et présente la fraction d'un point de vue plus simple. Par exemple, la période de la fraction que l'on obtient par la deuxième méthode est parfois très longue (on peut déjà le remarquer avec la $\sqrt{13}$, et elle peut être encore bien plus longue dans d'autres cas !), et cela peut poser plus de problème à l'utilisation que la première méthode !

4.3 Calcul de fractions correspondantes

Vous aurez sûrement remarqué que ces raisonnements, même s'ils permettent de trouver la valeur sous fraction continuée assez rapidement, sont moins pratiques lorsqu'il s'agit de les remettre sous forme de fraction irréductible. Il existe un moyen de contrer le problème, bien que cette méthode ne nous donne pas directement la valeure exacte. Il s'agit de calculer les valeurs des **fractions correspondantes**, ou **réduites**, c'est-à-dire les fractions irréductibles du type

$$\omega_n = \frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \dots + \frac{b_n}{a_n}}}$$

puis, en se reportant à chaque fois sur les deux réduites précédentes, de calculer la fraction correspondante suivante.

Prenons la fraction continuée quelconque présentée ci-dessus. Pour commencer, on a besoin des deux premières réduites

$$\omega_0 = \frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}$$
$$\omega_1 = \frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{b_1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + b_1}{a_1}$$

Suite à cela, on calcule ω_2 de la manière suivante

$$\omega_2 = \frac{P_2}{Q_2} = \frac{b_2 P_0 + a_2 P_1}{b_2 Q_0 + a_2 Q_1}$$

et de manière générale

$$\omega_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{b_n P_{n-2} + a_n P_{n-1}}{b_n Q_{n-2} + a_n Q_{n-1}}$$

Eclaircissons cela à l'aide d'un exemple, celui de $\sqrt{18} = [4; \overline{4, 8}]$

$$\omega_0 = \frac{4}{1}$$
$$\omega_1 = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$
$$\omega_2 = \frac{1 \cdot 4 + 8 \cdot 17}{1 \cdot 1 + 8 \cdot 4} = \frac{140}{33}$$
$$\omega_3 = \frac{1 \cdot 17 + 4 \cdot 140}{1 \cdot 4 + 4 \cdot 33} = \frac{577}{136}$$
$$\dots$$

Cette méthode est bien entendu applicable pour n'importe quelle sorte de fractions continuées, qu'elle soit de base ou généralisée. Voici la démonstration de cette méthode :
Tout d'abord, définissons deux suites de fonctions récursivement

$$p_0(x) = x$$
$$q_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x \cdot p_0(a_0) + b_1$$
$$q_1(x) = x$$

$$p_n(x) = x \cdot p_{n-1}(a_{n-1}) + b_n \cdot p_{n-2}(a_{n-2})$$
$$q_n(x) = x \cdot q_{n-1}(a_{n-1}) + b_n \cdot q_{n-2}(a_{n-2})$$

Prouvons par récurrence que $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{p_n(a_n)}{q_n(a_n)}$ $\forall n$, où $\frac{P_n}{Q_n}$ est la fraction irréductible correspondante, comme expliqué auparavant.

Vérifions :

$$\frac{P_0}{Q_0} = a_0 = \frac{p_0(a_0)}{q_0(a_0)} \qquad \text{ok}$$

$$\frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{b_1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + b_1}{a_1} = \frac{p_1(a_1)}{q_1(a_1)} \qquad \text{ok}$$

Supposons vrai pour n.

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \ldots + \frac{b_n}{\mathbf{a_n}}}} = \frac{p_n(a_n)}{q_n(a_n)}$$

La fraction suivante est la même, où le terme $\mathbf{a_n}$ est remplacé par $\mathbf{a_n} + \frac{\mathbf{b_{n+1}}}{\mathbf{a_{n+1}}}$, et par hypothèse de récurrence, on peut écrire la deuxième égalité

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \ldots + \frac{b_n}{\mathbf{a_n} + \frac{\mathbf{b_{n+1}}}{\mathbf{a_{n+1}}}}}} = \frac{p_n(a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})}{q_n(a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})}$$

Mais la fraction $\frac{p_n(a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})}{q_n(a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})}$ est égale à

$$= \frac{a_n \cdot p_{n-1}(a_{n-1}) + \frac{b_{n+1} \cdot p_{n-1}(a_{n-1})}{a_{n+1}} + b_n \cdot p_{n-2}(a_{n-2})}{a_n \cdot q_{n-1}(a_{n-1}) + \frac{b_{n+1} \cdot q_{n-1}(a_{n-1})}{a_{n+1}} + b_n \cdot q_{n-2}(a_{n-2})} =$$

en multipliant cette fraction par $\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}}$, on obtient

$$= \frac{a_n \cdot a_{n+1} \cdot p_{n-1}(a_{n-1}) + b_{n+1} \cdot p_{n-1}(a_{n-1}) + a_{n+1} \cdot b_n \cdot p_{n-2}(a_{n-2})}{a_n \cdot a_{n+1} \cdot q_{n-1}(a_{n-1}) + b_{n+1} \cdot q_{n-1}(a_{n-1}) + a_{n+1} \cdot b_n \cdot q_{n-2}(a_{n-2})} =$$

on met a_{n+1} en évidence

$$= \frac{a_{n+1}[a_n \cdot p_{n-1}(a_{n-1}) + b_n \cdot p_{n-2}(a_{n-2})] + b_{n+1} \cdot p_{n-1}(a_{n-1})}{a_{n+1}[a_n \cdot q_{n-1}(a_{n-1}) + b_n \cdot q_{n-2}(a_{n-2})] + b_{n+1} \cdot q_{n-1}(a_{n-1})} =$$

et finalement on obtient

$$= \frac{a_{n+1} \cdot p_n(a_n) + b_{n+1} \cdot p_{n-1}(a_{n-1})}{a_{n+1} \cdot q_n(a_n) + b_{n+1} \cdot q_{n-1}(a_{n-1})} = \frac{p_{n+1}(a_{n+1})}{q_{n+1}(a_{n+1})} \text{ et donc } \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{p_{n+1}(a_{n+1})}{q_{n+1}(a_{n+1})}$$

La méthode est démontrée.

Je terminerai la partie concrète de mon travail sur cette démonstration. Il me semble en effet avoir atteint mes objectifs, c'est-à-dire présenter les fractions continuées, ainsi que leur utilité dans certaines activités.

Chapitre 5

Conclusion

La conclusion qui suit portera non pas sur le contenu, mais sur l'expérience et l'enrichissement que ce travail m'a apporté.
Je n'avais encore jamais fait de travail si conséquent, non par le nombre de pages finales, mais par l'importance de la recherche et la connaissance avec laquelle on en ressort. Premièrement, on m'a conseillé d'apprendre à travailler avec un programme, LaTeX, qui est un excellent outil pour la rédaction de textes comprenant des formules ou des calculs. Au départ, ce programme semblait être difficile d'accès, et je n'étais pas très enthousiaste. Mais plus le travail avançait, plus je découvrais l'utilité d'un tel programme. En connaissant les fonctions, cela m'a permis de gagner du temps sur la mise en page. Par la suite, à l'EPFL, savoir utiliser ce programme me sera précieux.

En ce qui concerne le contenu du travail, j'ai eu réellement beaucoup de plaisir à me plonger comme cela dans un sujet durant plusieurs mois. Comme je l'ai dit dans mon introduction, je n'avais jamais entendu parler de telles fractions auparavant, et cela aura été très instructif de découvrir un sujet inconnu, et d'approfondir mes connaissances, la curiosité prenant le pas sur l'obligation.
J'avais la crainte au départ de ne pas avoir assez de matière pour faire un bon travail de maturité. Cette crainte n'était pas fondée, puisque j'ai découvert une grande quantité de théorèmes à démontrer. J'aurais néanmoins aimé trouver plus d'informations sur certains thèmes spécifiques dont le contenu m'intéressait, comme l'utilisation de ces fractions dans les horloges astronomiques ou l'extraction des racines carrées.
Cette expérience aura donc été très enrichissante, non seulement sur le plan positif exposé ci-dessus mais également sur les points négatifs. En effet, les difficultés rencontrées m'ont montré que si l'itinéraire choisi au départ n'aboutit pas toujours, c'est par la recherche d'autres voies que l'on s'enrichit.

"Le but, c'est le chemin."
(Pensée Zen)

Remerciements

A M. Bernard Verrey, mon professeur de TM, qui m'a orienté et aidé durant ce travail.
A ma soeur Fanny, qui termine son Master en Mathématiques et qui a été d'une grande aide durant ce travail, ainsi qu'à toutes les personnes de mon entourage qui m'ont soutenu.

Bibliographie

[1] N. VOROBIEV, *Caractères de divisibilité, suite de Fibonacci*, Editions de Moscou, *Initiations aux mathématiques*

[2] M. CLEYET-MICHAUD, *Le nombre d'or*, Presses universitaires de France, *Que sais-je ?*, Vendôme, 1975

[3] G. CHARRIERE, *L'algèbre mode d'emploi*, Fournitures et éditions scolaires du canton de Vaud, Suisse, 1995

[4] R.A. DUNLAP, *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific Publishing Co, Singapour, 1997

[5] Petit Archimède, *numéros 64-70*, 1980

[6] http ://www.bibmath.net/bios/index.php3 ?action=affiche&quoi=fibonacci

[7] http ://www.ilemaths.net/encyclopedie/Fraction_continue.html

[8] http ://www.anemsa.com/fra/index.html

Annexe A

Développement de la $\sqrt{13}$ par la méthode de changements de variables.

$$x^2 - 13 = 0 \qquad \text{I}$$
$$f_1(3) < 0 \quad , \quad f_1(4) > 0$$
$$x = 3 + \frac{1}{a}$$
$$4a^2 - 6a - 1 = 0 \qquad \text{II}$$
$$f_2(1) < 0 \quad , \quad f_2(2) > 0$$
$$a = 1 + \frac{1}{b}$$
$$3b^2 - 2b - 4 = 0 \qquad \text{III}$$
$$f_3(1) < 0 \quad , \quad f_3(2) > 0$$
$$b = 1 + \frac{1}{c}$$
$$3c^2 - 4c - 3 = 0 \qquad \text{IV}$$
$$f_4(1) < 0 \quad , \quad f_4(2) > 0$$
$$c = 1 + \frac{1}{d}$$
$$4d^2 - 2d - 3 = 0 \qquad \text{V}$$
$$f_5(1) < 0 \quad , \quad f_5(2) > 0$$
$$d = 1 + \frac{1}{e}$$
$$e^2 - 6e - 4 = 0 \qquad \text{VI}$$
$$f_6(6) < 0 \quad , \quad f_6(7) > 0$$
$$e = 6 + \frac{1}{f}$$
$$4f^2 - 6f - 1 = 0 \qquad \text{VII}$$

L'équation VII est la même que l'équation II, le cycle est terminé.

$$x = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}$$

$$x = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$$